NOTE INTEGRATIVE AL LIBRO DI TESTO

(per i dettagli delle dimostrazioni si rimanda alle lezioni oppure al testo M. Dedò, "Trasformazioni geometriche", Decibel-Zanichelli, 1996)

(1) Sia f una isometria con (almeno) tre punti fissi non allineati. Allora $f = id$ ("identità" o "trasformazione identica")

f coincide con id su 3 punti non allineati. Per il risultato "uno" allora f coincide con id su tutti i punti del piano

(2) Notazione: introduciamo una notazione comoda per indicare le isometrie del piano

traslazione di vettore v $\rightsquigarrow$ τ_v
riflessione rispetto retta r $\rightsquigarrow$ σ_r
rotazione di angolo α attorno al punto O $\rightsquigarrow$ $\rho_{O,\alpha}$

in questo modo la glissoriflessione di asse r e vettore v (con $r \parallel v$) può essere indicata come

$$\sigma_r \circ \tau_v = \tau_v \circ \sigma_r$$

(3) Dati due punti distinti A, B nel piano, si chiama asse del segmento A, B la retta perpendicolare a AB passante per il punto medio di AB.

- l'asse del segmento AB è costituito da tutti e soli i punti del piano P tali che $d(AP) = d(BP)$

- se f è una riflessione e P è un punto t.c. $P \neq f(P)$ allora indicando con r l'asse del segmento $Pf(P)$ si ha che $f = \sigma_r$

- se f è una rotazione e P è un punto t.c. $P \neq f(P)$ allora il centro di f appartiene all'asse del segmento $Pf(P)$

(4) Sia f una isometria con (almeno) due punti fissi distinti A, B. Allora $f = id$ oppure $f = \sigma_r$ (dove r è la retta passante per A e B)

Si hanno due possibilità

- $\forall P \notin r$ si ha $P = f(P)$
  in questo caso $f = id$ per (1)

- $\exists P \notin r$ t.c. $P \neq f(P)$
  sia s l'asse del segmento $Pf(P)$

Essendo $A = f(A)$ si ha che

$$d(AP) = d(f(A), f(P)) = d(A, f(P))$$

questo significa che $A \in s$

Analogamente si mostra $B \in s$

(e quindi $s = r$)

Si osserva allora che f coincide con σ_r sui 3 punti non allineati A, B, P, e quindi $f = \sigma_r$ (per il risultato "uno")

(5) L'insieme formato da tutte le isometrie del piano è gruppo rispetto alla composizione di isometrie.

In particolare

- vale la proprietà associativa

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

(che potremo quindi scrivere senza utilizzare le parentesi come $f \circ g \circ h$)

- $(\sigma_r)^{-1} = \sigma_r$

- $(\tau_v)^{-1} = \tau_{-v}$

- $(f_{0,\alpha})^{-1} = f_{0,-\alpha}$

- $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

- se $f \circ g = id$ allora $f = g^{-1}$ e $g = f^{-1}$

(6) Sia f una isometria del piano, allora f è il prodotto di al più 3 riflessioni

Sia f una isometria. Abbiamo 2 casi

1 $\forall P$ nel piano si ha $P = f(P)$.
In questo caso $f = id$ → "prodotto di zero riflessioni"

2 $\exists P_1$ nel piano t.c. $P_1 \neq f(P_1)$

chiamiamo r l'asse del segmento $P_1 f(P_1)$
e consideriamo
$\sigma_r \circ f$
osserviamo che $\sigma_r \circ f(P_1) = P_1$
Abbiamo 2 casi:

2.1 $\sigma_r \circ f$ fissa tutti i punti del piano,
quindi $\sigma_r \circ f = id$,
quindi $f = (\sigma_r)^{-1} = \sigma_r$ → "prodotto di una riflessione"

2.2 $\exists P_2$ t.c. $P_2 \neq \sigma_r \circ f(P_2)$

sia s l'asse del segmento $P_2\ r_1 \circ f(P_2)$

Dal momento che P_1 è fisso per $r_1 \circ f$
si ha che

$$d(P_1, P_2) = d\left(r_1 \circ f(P_1), r_1 \circ f(P_2)\right) = d\left(P_1, r_1 \circ f(P_2)\right)$$

quindi $P_1 \in s$

Consideriamo $r_s \circ r_1 \circ f$
Osserviamo che P_1 e P_2 sono fissi
per $r_s \circ r_1 \circ f$

Applicando (4) si hanno 2 possibilità

2.2.1 $r_s \circ r_1 \circ f = id$

quindi

$$f = (r_s \circ r_1)^{-1} = (r_1)^{-1} \circ (r_s)^{-1} = r_1 \circ r_s$$

"prodotto di due riflessioni"

2.2.2 $r_s \circ r_1 \circ f = r_t$ (per una certa retta t, quale?)

in questo caso moltiplicando i due termini dell'uguaglianza a sinistra per $(r_s \circ r_1)^{-1}$ otteniamo

$$(r_s \circ r_1)^{-1} \circ (r_s \circ r_1 \circ f) = (r_s \circ r_1)^{-1} \circ r_t$$

e sviluppando i conti

$$f = r_1 \circ r_s \circ r_t$$

"prodotto di tre riflessioni"

(7) Se f è una isometria con almeno un punto fisso, allora f è composizione di al massimo due riflessioni

Ripetere la dimostrazione di (6) a partire dai casi 2.1 e 2.2

(8) Rotazioni e traslazioni conservano l'orientazione
Riflessioni e glissoriflessioni invertono l'orientazione

Se f e g conservano l'orientazione, allora $f \circ g$ conserva l'orient.
Se f e g invertono l'orientazione, allora $f \circ g$ conserva l'orient.
Se f conserva l'orient e g inverte l'orientazione, allora
$f \circ g$ e $g \circ f$ invertono l'orientazione

Se f è composizione di un numero pari di riflessioni
allora f conserva l'orientazione
Se f è composizione di un numero dispari di riflessioni
allora f inverte l'orientazione

(9) Se f è una isometria composizione di tre riflessioni senza punti fissi, allora f è una glissoriflessione

Sia A un punto del piano. Essendo f priva di punti fissi si ha che $A \neq f(A)$. Sia allora H il punto medio del segmento $A f(A)$.
Consideriamo $f_{H,180°}$ e

$$g = f_{H,180°} \circ f$$

Si ha che g è una isometria che inverte l'orientazione.
Inoltre $A = g(A)$ quindi g è composizione di al più due riflessioni per (7)

g è una riflessione σ_r

(essendo A un punto fisso $A \in r$)

Quindi se $g = f_{H,180°} \circ f$ e $g = \sigma_r$

si ha $\sigma_r = f_{H,180°} \circ f$

$$f = \left(f_{H,180°}\right)^{-1} \circ \sigma_r = f_{H,180°} \circ \sigma_r$$

Osserviamo che se s e t sono due rette passanti per H t.c.
- $s \perp t$
- $s \parallel r$

possiamo scrivere

$$f_{H,180} = \sigma_s \circ \sigma_t = \sigma_t \circ \sigma_s \qquad (\text{perché } s \perp t)$$

inoltre

$\sigma_s \circ \sigma_r$ è una traslazione (perché $s \parallel r$)
di un certo vettore v
perpendicolare a s (e a r) e
quindi parallelo a t

Si ha perciò

$$f = f_{H,180} \circ \sigma_r = \sigma_t \circ \sigma_s \circ \sigma_r = \underbrace{\sigma_t \circ \tau_v}$$

è una glissoriflessione
essendo $t \parallel v$